MATHEMATICS XII

(New Syllabus)

2020

Part - A

1. (a) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও। $2 \times 1 = 2$

(i) স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N-এর উপর একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া * সংজ্ঞাত হয় $a * b = \frac{a+2b}{3}$ সকল $a, b \in N$-এর জন্য। দ্বিপদ প্রক্রিয়াটি সংযোগ কি না আলোচনা করো।

(ii) $\sec^2\left(\cot^{-1}\frac{1}{2}\right) + \operatorname{cosec}^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)$-এর মান নির্ণয় করো।

(b) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও। $2 \times 1 = 2$

(i) $2A + B^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$ এবং $2B + A^T = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ হয় তবে ম্যাট্রিক্স A-এর মান নির্ণয় করো।

(ii) প্রমাণ করো যে $\begin{vmatrix} 1 & \log_a b & \log_a c \\ \log_b a & 1 & \log_b c \\ \log_c a & \log_c b & 1 \end{vmatrix} = 0$

$(a > 0, b > 0, c > 0)$।

(c) যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও। $2 \times 3 = 6$

PMBIOLOGY

(i) $y = Ae^{x} + Be^{-x} + x^{2}$ সমীকরণের A এবং B অপনয়ন করে অবকল সমীকরণটি নির্ণয় করো (A, B ধ্রুবক)।

(ii) $x^{2} = a^{\sin^{-1} t}$ এবং $y^{2} = a^{\cos^{-1} t}$ হলে দেখাও যে $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

(iii) $f(x) = \frac{\sin 5x}{2x}$ (যখন $x \neq 0$)

$= \frac{5k}{4}$ (যখন $x = 0$)

$f(x), x = 0$-তে সন্তত হলে k-এর মান নির্ণয় করো।

(iv) $x > 0, y > 0$ এবং $xy = 100$ হলে $(x + y)$-এর অবম মান নির্ণয় করো।

(কলন বিদ্যার প্রয়োগ করতে হবে)।

(v) মান নির্ণয় করোঃ $\int \frac{\cos x + x \sin x}{x(x + \cos x)} dx$

(vi) $f(x) = -f(-x)$ হলে দেখাও যে $\int_{-a}^{a} f(x) dx = 0$

(d) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও। $2 \times 1 = 2$

(i) $-3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টরের অভিমুখে একটি ভেক্টর নির্ণয় করো যার মান 14 একক।

(ii) yz সমতলে অবস্থিত কোনো সরলরেখা z অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে $60°$ কোণ করলে সরলরেখার দিক কোসাইনগুলি নির্ণয় করো।

RMPIOLOGY

(e) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও। $2 \times 1 = 2$

(i) $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ এবং $P(A - B) = \frac{1}{6}$ হলে A এবং B ঘটনা দুটি স্বাধীন কি না যাচাই করো।

(ii) একটি দ্বিপদ বিভাজন $B(n, p)$-এর গড় মান ও ভেদমান যথাক্রমে 4 এবং 3.2 হলে n এবং p-এর মান নির্ণয় করো।

2. (a) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও। $4 \times 1 = 4$

(i) Z অখণ্ড সংখ্যাসমূহের সেট। Z-এর উপর '*' একটি প্রক্রিয়া নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞাত হয়—

$a * b = a + b - 2$ যেখানে $a, b \in Z$

(x) দেখাও যে '*' একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া।

(y) '*' –এর একরূপ (Identity) উপাদান নির্ণয় করো।

(z) একটি পদ $a \in Z$-এর বিপরীত (inverse) পদ নির্ণয় করো।

(ii) দেখাও যে $\sin^{-1}\frac{12}{13} + \cos^{-1}\frac{4}{5} + \tan^{-1}\frac{63}{16} = \pi$

(b) নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও। $4 \times 2 = 8$

RMBIOLOGY

(i) $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

হলে AC, BC এবং $(A+B)C$-এর মান নির্ণয় করো। প্রমাণ করো যে, $(A+B)C = AC + BC$

অথবা

$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ হলে দেখাও যে যে-কোনো ধনাত্মক সংখ্যা n-এর জন্য

$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$

(ii) $x \neq y \neq z$ এবং $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$ হলে দেখাও যে $1 + xyz = 0$

অথবা,

প্রমাণ করো যে, $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (1-x^3)^2$

(c) নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও। $4 \times 3 = 12$

(i) $(\cos x)^y = (\cos y)^x$ হলে দেখাও যে,

$\frac{dy}{dx} = \frac{y\tan x + \log\cos y}{x\tan y + \log\cos x}$

অথবা,

RMBIOLOGY

$y = (\tan^{-1} x)^2$ হলে দেখাও যে $(1+x^2)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 2$

(ii) মান নির্ণয় করোঃ $\int \frac{2dx}{(1-x)(1+x^2)}$

অথবা,

মান নির্ণয় করোঃ $\int \left(\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}\right) dx$

(iii) সমাধান করোঃ $xy\frac{dy}{dx} = (x+2)(y+2)$,
দেওয়া আছে $x = 1$ যখন $y = -1$

অথবা,

সমাধান করোঃ $x^2dy + (xy + y^2)dx = 0$
যখন $x = 1$ এবং $y = 1$

(d) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও। $4 \times 1 = 4$

(i) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ এমন তিনটি ভেক্টর যেন $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ এবং $|\vec{c}| = 7$; $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$-এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো।

(ii) $A = (2, -1, 1)$, $B = (1, -3, -5)$ এবং $C = (3, -4, -4)$ তিনটি বিন্দু। প্রমাণ করো যে ΔABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ তৈরি করে (ভেক্টর পদ্ধতি প্রয়োগ করতে হবে)। অন্য কোণ দুটিও নির্ণয় করো।

(e) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও। $4 \times 1 = 4$

HMBIOLOGY

(i) x অক্ষ এবং $|x| + |y| = 1$ (যেখানে $y \geq 0$) দ্বারা সীমাবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। (কলন বিদ্যার প্রয়োগ করতে হবে)

(ii) প্রমাণ করো যে $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} \log 2$

(f) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও। $4 \times 1 = 4$

(i) A এবং B এমন দুটি ঘটনা যেন $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ এবং $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ হলে $P(A/B)$, $P(B/A)$, $P(A \cup B)$ এবং $P(\bar{B}/\bar{A})$-এর মান নির্ণয় করো।

(ii) $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ঘটনাসমূহ স্বাধীন এবং $P(A_i) = 1 - q_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ হলে প্রমাণ করো যে $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdots q_n$

3. (a) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও। $5 \times 1 = 5$

(i) একটি কৃষক সমবায় সমিতির কাছে 50 হেক্টর জমি আছে X এবং Y শস্যদানা চাষ করার জন্য। X এবং Y শস্যদানা থেকে হেক্টর প্রতি লাভের পরিমাণ যথাক্রমে 10,500 টাকা এবং 9,000 টাকা। ওই শস্যদানা রক্ষা করার জন্য যে তরল কীটনাশক ব্যবহার করা হয় যা X-এর জন্য হেক্টর প্রতি 20 লিটার এবং Y-এর জন্য হেক্টর প্রতি 10 লিটার। ওই জমির জল যে পুকুরে যায় তার মাছ এবং অন্যান্য প্রাণী রক্ষার জন্য 800

PMBIOLOGY

লিটারের বেশি কীটনাশক ব্যবহার করা যাবে না। প্রত্যেক প্রকার শস্যদানা কতটা জমিতে চাষ করলে সমবায়ের সর্বাধিক লাভ হয় তা নির্ণয় করার সমস্যাকে রৈখিক প্রোগ্রাম বিধি সমস্যা হিসেবে প্রকাশ করো এবং সমাধান করো।

(ii) লেখচিত্রের সাহায্যে রৈখিক প্রোগ্রাম বিধি সমস্যাটির সমাধান করো এবং অভীষ্ট অপেক্ষক Z-এর সর্বাধিক মান নির্ণয় করো। (ছক কাগজের প্রয়োজন নেই)।

$Z = 4x + y$

শর্ত সাপেক্ষে $x + y \leq 50$

$3x + y \leq 90$

এবং $x \geq 0, y \geq 0$

(b) যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও। $5 \times 2 = 10$

(i) প্রমাণ করো যে $y^2 = 4a\left[x + a\sin\frac{x}{a}\right]$-এর উপর অবস্থিত যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল তা একটি অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত। অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো।

(ii) সমাধান করোঃ $\frac{dy}{dx} - 3y\cot x = \sin 2x$, দেওয়া আছে $y = 2$ যখন $x = \frac{\pi}{2}$।

(iii) x, y দুটি ধনাত্মক সংখ্যা যেন $x + y = 60$ এবং xy^3 চরম। x এবং y -এর মান নির্ণয় করো।

RMBIOLOGY

(iv) সীমার যোগফল আকারে প্রকাশ করে $\int_1^3 (x^2 + x)dx$-এর মান নির্ণয় করো।

(c) যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও। $5 \times 1 = 5$

(i) একটি পরিবর্তনশীল সমতল মূলবিন্দু থেকে $3p$ দূরে অবস্থিত এবং অক্ষ তিনটিকে যথাক্রমে A, B, C বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে ΔABC -এর ভরকেন্দ্রের সঞ্চারপথের সমীকরণ

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{p^2}$$

(ii) $(3, 4, 1)$ এবং $(0, 1, 0)$ বিন্দুগামী একটি সমতলের সমীকরণ নির্ণয় করো যা $\frac{x+3}{2} = \frac{y-3}{7} = \frac{z-2}{5}$-এর সমান্তরাল।

RMBIOLOGY

Solution

Part - A

1.(a)(i) যদি $a, b \in N$ হয়, তবে * দ্বিপদ প্রক্রিয়ার প্রদত্ত সংজ্ঞা থেকে পাই,

$$a * b = \frac{a+2b}{3}$$

আবার ধরা যাক, $a, b, c \in N$; তাহলে,

$$(a * b) * c = \left(\frac{a+2b}{3}\right) * c$$

$$= \frac{\frac{a+2b}{3}+2c}{3} = \frac{a+2b+6c}{9}$$

এবং $a * (b * c) = a * \left(\frac{b+2c}{3}\right)$

$$= \frac{a+\frac{2b+4c}{3}}{3} = \frac{3a+2b+4c}{9}$$

সুতরাং, $(a * b) * c \neq a * (b * c)$, যা প্রমাণ করে যে, * দ্বিপদ প্রক্রিয়াটি সংযোগ নয়।

(ii) $\sec^2\left(\cot^{-1}\frac{1}{2}\right) + \operatorname{cosec}^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)$

$$= 1 + \tan^2\left(\cot^{-1}\frac{1}{2}\right) + 1 + \cot^2\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)$$

$$= 1 + \tan^2(\tan^{-1} 2) + 1 + \cot^2(\cot^{-1} 3)$$

$$= 1 + \{\tan(\tan^{-1} 2)\}^2 + 1 + \{\cot(\cot^{-1} 3)\}^2$$

$$= 1 + (2)^2 + 1 + (3)^2$$

$$= 15$$

RMBIOLOGY

(b) (i) $2A + B^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$ $\cdots (1)$

$2B + A^T = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\cdots (2)$

সমীকরণ (2)-এর উভয়পক্ষে ম্যাট্রিক্সের পরিবর্ত করে পাওয়া যায়,

$A + 2B^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ $\cdots (3)$

$\{(3) - 2 \times (1)\}$, করে পাওয়া যায়,

$$A + 2B^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4A + 2B^T = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 20 & 4 \end{pmatrix}$$

$(-) \quad (-) \qquad (-)$

$$-3A = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -12 & -3 \end{pmatrix}$$

বা, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ A-এর মান $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) ছায়া গণিত XII-এর পৃষ্ঠা 162-এর উদাহরণ 17 দ্যাখো।

(c) (i) $y = Ae^x + Be^{-x} + x^2$ (A, B ধ্রুবক)

বা, $y - x^2 = Ae^x + Be^{-x}$ $\cdots (1)$

RMBIOLOGY

(1) -এর উভয়পক্ষকে পরপর দুবার x-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাওয়া যায়,

$$\frac{dy}{dx} - 2x = Ae^{x} - Be^{-x}$$

এবং $\frac{d^2y}{dx^2} - 2 = Ae^{x} + Be^{-x}$

বা, $\frac{d^2y}{dx^2} - 2 = y - x^2$ [(1)-এর সাহায্যে]

বা, $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 2 - x^2$

$\therefore$ নির্ণেয় অবকল সমীকরণটি হল,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 2 - x^2$$

(ii) ছায়া গণিত XII-এর পৃষ্ঠা 282-এর উদাহরণ 13(ii) দ্যাখো।

(iii) $f(x) = \frac{\sin 5x}{2x}\,;\, x \neq 0$

$= \frac{5k}{4}\,;\, x = 0$

এখন $f(x), x = 0$-তে সন্তত হলে $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ হবে।

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

বা, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{2x} = \frac{5k}{4}$

বা, $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 5x}{5x}\right) \times \frac{5}{2} = \frac{5k}{4}$

বা, $\frac{5}{2} = \frac{5k}{4}$ $\left[\because \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right]$

RMBIOLOGY

বা, $k = 2$

(iv) $xy = 100$

বা, $y = \frac{100}{x}$

ধরা যাক, $S = x + y$

বা, $S = x + \frac{100}{x}$

$\therefore \frac{dS}{dx} = 1 - \frac{100}{x^2}$ এবং $\frac{d^2S}{dx^2} = \frac{200}{x^3}$

S-এর চরম বা অবম মানের জন্য $\frac{dS}{dx} = 0$

বা, $1 - \frac{100}{x^2} = 0$

বা, $x^2 = 100$

বা, $x = \pm 10$

যেহেতু, $x, y > 0$; $\therefore x = 10$

এখন, $\left[\frac{d^2S}{dx^2}\right]_{x=10} = \frac{200}{1000} > 0$

$\therefore$ $x = 10$-এ $(x + y)$-এর অবম মান থাকবে

এবং অবম মান$= 10 + \frac{100}{10} = 10 + 10 = 20$

(v) $\int \frac{\cos x + x \sin x}{x(x + \cos x)} dx$

$= \int \frac{(x + \cos x) - x(1 - \sin x)}{x(x + \cos x)} dx$

$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{1 - \sin x}{x + \cos x} dx$

$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{d(x + \cos x)}{x + \cos x}$

RMBIOLOGY

$= \log|x| - \log|x + \cos x| + c$

(vi) স্পষ্টতই, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$

$\cdots (1)$

এখন, $\int_{-a}^{0} f(x)dx$ সমাকলে $x = -z$ বসানো হল।

তাহলে $dx = -dz$ এবং $x = -z$ থেকে পাওয়া যায়,

x	$-a$	0
z	a	0

$\therefore \int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-z)dz$

$= \int_{0}^{a} f(-z)dz = \int_{0}^{a} f(-x)dx$

$\therefore$ (1) থেকে পাওয়া যায়,

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$

$= \int_{0}^{a} [f(x) + f(-x)]\, dx \qquad \cdots (2)$

আবার, $f(x)$ যদি x-এর অযুগ্ম অপেক্ষক হয়, তবে $f(-x) = -f(x) \qquad \cdots (3)$

সুতরাং, $\int_{-a}^{a} f(x) = 0$ [(2) ও (3) থেকে]

(d) (i) ছায়া গণিত XII-এর পৃষ্ঠা 677-এর উদাহরণ 10 দ্যাখো।

RMBIOLOGY

(ii) ছায়া গণিত XII-এর পৃষ্ঠা 718-এর উদাহরণ 8 দ্যাখো।

(e) (i) ছায়া গণিত XII-এর পৃষ্ঠা 844-এর উদাহরণ 7 দ্যাখো।

(ii) একটি দ্বিপদ বিভাজন $B(n,p)$-এর গড় মান $= 4$

বা, $np = 4$ $\cdots (1)$

এবং ভেদমান $= 3.2$

বা, $npq = 3.2$

বা, $4q = 3.2$ [(1) থেকে]

বা, $q = 0.8$

বা, $1 - p = 0.8$ [$\because$ $p + q = 1$]

বা, $p = 1 - 0.8 = 0.2$

$\therefore$ $n = \frac{4}{p}$ [(1) থেকে]

বা, $n = \frac{4}{0.2}$

বা, $n = 20$

2.(a)(i) ছায়া গণিত XII-এর পৃষ্ঠা 59-এর উদাহরণ 29 দ্যাখো।

(ii) $\sin^{-1}\frac{12}{13} + \cos^{-1}\frac{4}{5} + \tan^{-1}\frac{63}{16}$

$= \left(\cos^{-1}\frac{5}{13} + \cos^{-1}\frac{4}{5}\right) + \tan^{-1}\frac{63}{16}$

$= \cos^{-1}\left(-\frac{16}{65}\right) + \tan^{-1}\frac{63}{16}$

RMBIOLOGY

$$= \pi - \cos^{-1}\frac{16}{65} + \cos^{-1}\frac{16}{65}$$

$$= \pi$$

(b) (i) $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\therefore (A+B)C = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ -5 & 0 & 10 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -14+24 \\ -10+30 \\ 16+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 28 \end{bmatrix}$$

এখন, $AC = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -12+21 \\ -12+24 \\ 14+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+3 \\ 2+6 \\ 2-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore AC + BC = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$\therefore (A+B)C = AC + BC$ (প্রমাণিত)

অথবা

ছায়া গণিত XII-এর পৃষ্ঠা 129-এর উদাহরণ 16 দ্যাখো।

RMBIOLOGY

(ii) $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$

বা, $\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

বা, $xyz \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} + (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = 0$

বা, $(xyz+1) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = 0$

বা, $xyz + 1 = 0$ (প্রমাণিত)

অথবা, $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = 0$

বা, $(x-y)(y-z)(z-x) = 0$ - এটি অসম্ভব যেহেতু $x \neq y \neq z$

অথবা,

$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1+x+x^2 & x & x^2 \\ 1+x+x^2 & 1 & x \\ 1+x+x^2 & x^2 & 1 \end{vmatrix} [C'_1 = C_1 + C_2 + C_3]$

$= (1+x+x^2) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & x^2 & 1 \end{vmatrix}$

RMBIOLOGY

$$= (1+x+x^2)\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1-x & x(1-x) \\ 0 & x(x-1) & 1-x^2 \end{vmatrix}$$

$$[R_2' = R_2 - R_1;\ R_3' = R_3 - R_1]$$

$$= (1+x+x^2)[(1-x)(1-x^2) - x^2(x-1)(1-x)]$$

$$= (1+x+x^2)(x-1)[x^2 - 1 - x^2(1-x)]$$

$$= (1+x+x^2)(x-1)(x^2 - 1 - x^2 + x^3)$$

$$= (x^3-1)(x^3-1)$$

$$= (x^3-1)^2$$

$$= (1-x^3)^2$$ (প্রমাণিত)

(c) (i) $(\cos x)^y = (\cos y)^x$

উভয়পক্ষে লগারিদম নিয়ে পাই,

$$y \cdot \log(\cos x) = x \cdot \log(\cos y)$$

উভয়পক্ষে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$y \cdot \left[\frac{-\sin x}{\cos x}\right] + \log(\cos x) \cdot \frac{dy}{dx} = x \cdot \left[\frac{-\sin y}{\cos y}\right]\frac{dy}{dx} + \log(\cos y)$$

বা, $\frac{dy}{dx}\{\log(\cos x) + \frac{x\sin y}{\cos y}\} = \{\log(\cos y) + \frac{y\sin x}{\cos x}\}$

বা, $\frac{dy}{dx}\{\log(\cos x) + x\tan y\} = \{\log(\cos y) + y\tan x\}$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{y\tan x + \log\cos y}{x\tan y + \log\cos x}$

অথবা,

PMBIOLOGY

$y = (\tan^{-1} x)^2 \qquad \cdots (1)$

উভয়পক্ষে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাওয়া যায়,

$y_1 = 2\tan^{-1} x \cdot \frac{1}{1+x^2}$

বা, $(1+x^2)^2 y_1^2 = 4(\tan^{-1} x)^2$

বা, $(1+x^2)^2 y_1^2 = 4y$ [(1) থেকে]

উভয়পক্ষে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাওয়া যায়,

$(1+x^2)^2 2y_1 y_2 + 2(1+x^2)2xy_1^2 = 4y_1$

বা, $(1+x^2)^2 y_2 + 2x(1+x^2)y_1 - 2 = 0$

$\therefore (1+x^2)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 2$

(ii) $\int \frac{2}{(1-x)(1+x^2)} dx$

ধরা যাক, $\frac{2}{(1-x)(1+x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$

$\therefore\ A(1+x^2) + (Bx+C)(1-x) = 2 \qquad \cdots (1)$

(1) অভেদে $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$2A = 2$ বা, $A = 1$

$x = 0$ বসিয়ে পাই, $A + C = 2$ বা, $C = 1$

$x = -1$ বসিয়ে পাই,

$2A + (-B + C)(1+1) = 2$

বা, $2 - 2B + 2C = 2$

RMBIOLOGY

বা, $B = C$

বা, $B = 1$

$\therefore \int \frac{2}{(1-x)(1+x^2)} dx$

$= \int \frac{A}{1-x} dx + \int \frac{Bx+C}{1+x^2} dx$

$= \int \frac{dx}{1-x} + \int \frac{x+1}{1+x^2} dx$

$= -\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx + \int \frac{dx}{1+x^2}$

$= -\log|x-1| + \frac{1}{2}\log(1+x^2) + \tan^{-1} x + C$

অথবা,

$\int \left(\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}\right) dx$

$= \int \left(\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}} + \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}}\right) dx$

$= \sqrt{2} \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2 \sin x \cos x}} dx$

$= \sqrt{2} \int \frac{d(\sin x - \cos x)}{\sqrt{1-(\sin x - \cos x)^2}}$

$= \sqrt{2} \sin^{-1}(\sin x - \cos x) + C$

(iii) $xy\frac{dy}{dx} = (x+2)(y+2)$

বা, $\int \frac{y\, dy}{y+2} = \int \frac{x+2}{x} dx$

বা, $\int \frac{(y+2)-2}{y+2} dy = \int dx + 2\int \frac{dx}{x}$

RMBIOLOGY

বা, $y - 2\log|y+2| = x + 2\log|x| + C \quad \cdots (1)$

$x = 1, y = -1$ বসিয়ে পাই,

$-1 - 2\log|-1+2| = 1 + 2\log|1| + C$

বা, $C = -2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান,

$y - 2\log|y+2| = x + 2\log|x| - 2$

অথবা,

$x^2dy + (xy + y^2)dx = 0$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{-(xy+y^2)}{x^2}$

বা, $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right)$

ধরি, $y = vx$

$\therefore v + x\frac{dv}{dx} = -(v + v^2)$

বা, $x\frac{dv}{dx} = -(2v + v^2)$

বা, $-\frac{1}{v^2+2v}dv = \frac{1}{x}dx$

বা, $-\int\left\{\frac{1}{(v+1)^2-(1)^2}\right\}dv = \int\frac{1}{x}dx$

বা, $-\frac{1}{2}\log\left|\frac{v}{v+2}\right| = \log x + \log c_1$

বা, $-\frac{1}{2}\log\left|\frac{y}{y+2x}\right| = \log x + \log c_1$

বা, $\log\left|\frac{y}{y+2x}\cdot x^2\right| = -2\log c_1$

RMBIOLOGY

বা, $\log\left|\frac{y}{y+2x}\cdot x^2\right| = \log\left(\frac{1}{c_1^2}\right)$

বা, $\frac{x^4y^2}{(y+2x)^2} = \frac{1}{c_1^4}$ বা, $\frac{x^4y^2}{(y+2x)^2} = c^2$

বা, $x^4y^2 = c^2(y+2x)^2$

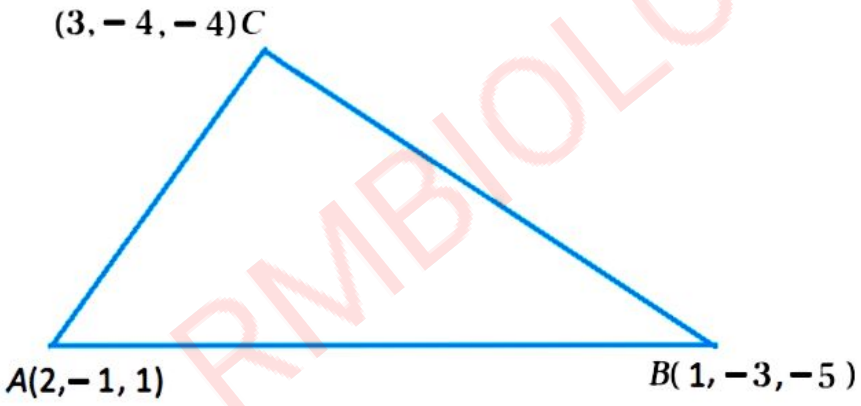
$x = 1, y = 1$ বসিয়ে পাই,

$1 = c^2(1+2)^2$ বা, $c^2 = \frac{1}{9}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $9x^4y^2 = (y+2x)^2$

(d) (i) ছায়া গণিত XII-এর পৃষ্ঠা 698-এর উদাহরণ 19 দ্যাখো।

(ii)



ধরি, $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - 6\hat{k}$

$\vec{b} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$

$\vec{c} = \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = -\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}$

এখন, $\vec{b}\cdot\vec{c} = -2 - 3 + 5 = 0$

$\therefore \angle ACB = 90°$

$\therefore \Delta ABC$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ। (প্রমাণিত)

RMBIOLOGY

ধরা যাক, $\angle ABC = \theta$

$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$

বা, $\cos\theta = \frac{|-2+2-6|}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{6}}$

বা, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{6}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{6}}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{41}}\right) = \angle ABC$

$\therefore \angle CAB = 90° - \angle ABC = 90° - \theta$

$= 90° - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{41}}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{41}}\right)$

(e) (i) $|x| + |y| = 1$

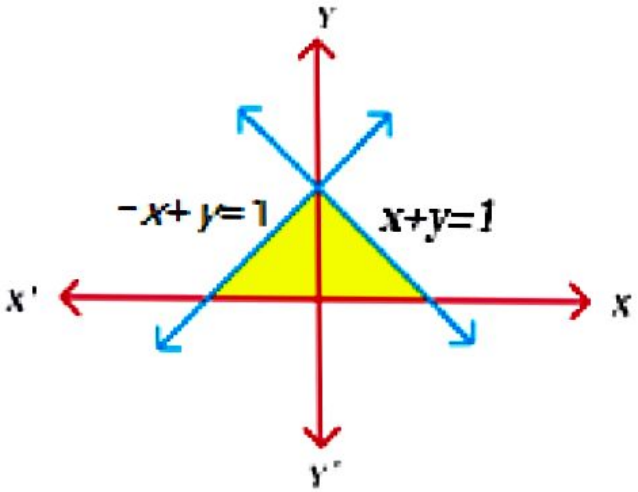
যদি, $x > 0, y > 0$ হয়, তবে

$x + y = 1 \qquad \cdots (1)$

$x < 0, y > 0$ হয়, তবে

$-x + y = 1$

বা, $\frac{x}{-1} + \frac{y}{1} = 1 \qquad \cdots (2)$



নির্ণীত সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল

RMBIOLOGY

$= 2\int_0^1 y\,dx$ [যেখানে $x + y = 1$]

$= 2\int_0^1 (1-x)dx = 2\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1$

$= 2 \times \frac{1}{2} = 1$ বর্গএকক

(ii) ধরি, $I = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx$

ধরা যাক, $x = \tan\theta \;\therefore dx = \sec^2\theta d\theta$

x	0	1
z	0	$\frac{\pi}{4}$

$\therefore I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\log(1+\tan\theta)}{1+\tan^2\theta}\sec^2\theta\,d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan\theta)d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right]d\theta$

$\left[\because \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx\right]$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[1+\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right]d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[\frac{1+\tan\theta+1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right]d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left(\frac{2}{1+\tan\theta}\right)d\theta$

$= \log 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan\theta)d\theta$

$\therefore I = \log 2[\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} - I$

RMBIOLOGY

বা, $2I = \frac{\pi}{4}\log 2$

বা, $I = \frac{\pi}{8}\log 2$ (প্রমাণিত)

(f) (i) $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$

$$\therefore\ P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$$

$$P(B/A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{5}$$

আবার, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{23}{60}$$

$$\therefore P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{P(\bar{B}\cap\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P\{(A\cup B)^c\}}{1-P(A)} = \frac{1-\frac{23}{60}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\frac{37}{60}}{\frac{2}{3}} = \frac{37}{40}$$

(ii) ছায়া গণিত XII-এর পৃষ্ঠা 854-এর উদাহরণ 33 দ্যাখো।

3.(a)(i) মনে করা যাক, X দানাশষ্য চাষ করার জন্য x হেক্টর জমি আছে এবং Y দানাশষ্য চাষ করার জন্য y হেক্টর জমি আছে।

স্পষ্টতই, $x \geq 0$ এবং $y \geq 0$ $\cdots(1)$

এখন x ও y সিদ্ধান্তকারী চলরাশি কারণ চল দুটির ওপর সমগ্র সমস্যাটি নির্ভর করছে।

জমি থেকে মোট আয় $Z = 10500x + 9000y$

PMBIOLOGY

যা একটি বিষয়াত্মক অপেক্ষক।

যেহেতু মোট জমির পরিমাণ 50 হেক্টর

$\therefore x + y \leq 50 \qquad \cdots (3)$

আবার, X-এর জন্য হেক্টর প্রতি 20 এবং Y-এর জন্য হেক্টর প্রতি 10 লিটার তরল কীটনাশক ব্যবহার করা হয়।

যেহেতু 800 লিটারের বেশি কীটনাশক ব্যবহার করা যাবে না।

$\therefore 20x + 10y \leq 800 \qquad \cdots (4)$

এখন (1), (2), (3) এবং (4) সম্পর্ক চারটি সমন্বয় করে পাই,

চরম $Z = 10500x + 9000y$

বাধাগোষ্ঠী $x + y \leq 50$

$20x + 10y \leq 800$

এবং $x \geq 0, y \geq 0$

প্রদত্ত সমস্যার এটি রৈখিক প্রোগ্রামবিধি রূপ।

প্রদত্ত অসমীকরণগুলি অনুরূপ সমীকরণ হল,

$x + y = 50 \qquad \cdots (5)$

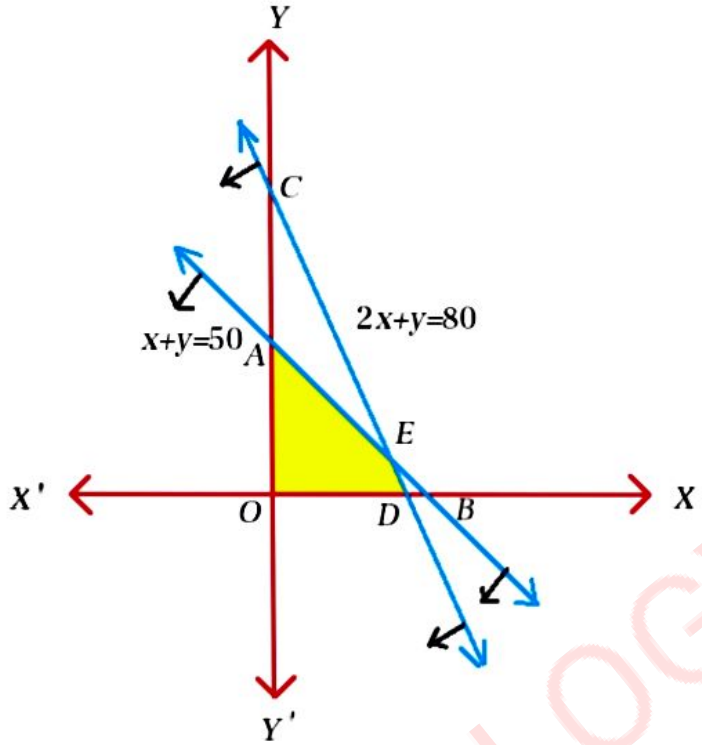
$20x + 10y = 800$

বা, $2x + y = 80 \qquad \cdots (6)$

যেহেতু $0 + 0 < 50$ এবং $2 \times 0 + 0 < 80$

RIMBIOLOGY

সুতরাং, অসমীকরণ দুটির সমাধান অঞ্চল হবে (5) ও (6) সরলরেখার যেদিকে মূলবিন্দু আছে সেদিকের অঞ্চল।



যেহেতু, $x, y \geq 0$ সুতরাং, প্রদত্ত শর্তগোষ্ঠী দ্বারা চিহ্নিত কার্যকর অঞ্চল $ODEAO$।

এই কার্যকর অঞ্চলের চারটি প্রান্তিক বিন্দু

$A(0, 50)$, $O(0, 0)$, $D(40, 0)$ এবং $E(30, 20)$

এখন,

প্রান্তিক বিন্দু	$z = 10500x + 9000y$-এর মান
$(0, 50)$	450000
$(0, 0)$	0
$(40, 0)$	420000

RMDIOLOGY

$(30, 20)$	$495000 \rightarrow$ চরম

সুতরাং, X দানাশষ্য 30 হেক্টর জমিতে ও Y দানাশষ্য 20 হেক্টর জমিতে চাষ করলে সর্বাধিক লাভ হয়।

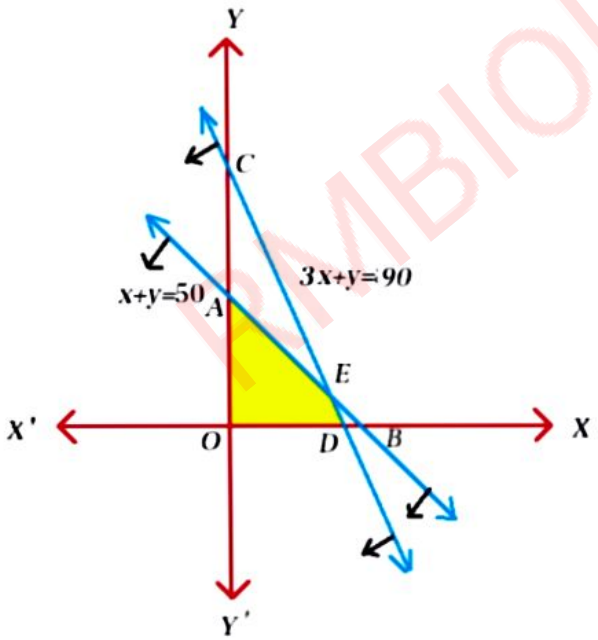
(ii) প্রদত্ত অসমীকরণগুলির অনুরূপ সমীকরণ হল,

$$x + y = 50 \qquad \cdots (1)$$

$$3x + y = 90 \qquad \cdots (2)$$

যেহেতু $0 + 0 < 50$ এবং $3 \times 0 + 0 < 90$

সুতরাং, অসমীকরণগুলির সমাধান অঞ্চল হবে (1) ও (2) সরলরেখার যেদিকে মূলবিন্দু আছে সেদিকের অঞ্চল।



যেহেতু, $x, y \geq 0$ সুতরাং, প্রদত্ত শর্তগোষ্ঠী দ্বারা চিহ্নিত কার্যকর অঞ্চল $AODEA$,

এই কার্যকর অঞ্চলের চারটি প্রান্তিক বিন্দু

$A(0, 50)$; $O(0, 0)$; $D(30, 0)$ এবং $E(20, 30)$

PMBIOLOGY

এখন,

প্রান্তিক বিন্দু	$z = 4x + y$-এর মান
$(0, 50)$	50
$(0, 0)$	0
$(30, 0)$	$120 \leftarrow$ চরম
$(20, 30)$	110

z-এর সর্বাধিক মান 120।

(b) (i) প্রদত্ত বক্র, $y^2 = 4a\left(x + a\sin\frac{x}{a}\right) \quad \cdots (1)$

উভয়পক্ষে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করে,

$2y\frac{dy}{dx} = 4a(1 + \cos\frac{x}{a})$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}\left(1 + \cos\frac{x}{a}\right)$

ধরা যাক, (1) অধিবৃত্তের (h, k) বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল।

$\therefore \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(h,k)} = 0$ অর্থাৎ, $1 + \cos\frac{h}{a} = 0$

বা, $\cos\frac{h}{a} = -1$

$\therefore \sin\frac{h}{a} = 0$

আবার, (h, k) বিন্দু (1)-এর ওপর অবস্থিত।

$\therefore k^2 = 4a\left(h + a\sin\frac{h}{a}\right)$

বা, $k^2 = 4a(h + 0) \quad \left[\because \sin\frac{h}{a} = 0\right]$

RMBIOLOGY

বা, $k^2 = 4ah$

সুতরাং, (1)-এর ওপর অবস্থিত যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল, তা একটি অধিবৃত্তের ওপর অবস্থিত। (প্রমাণিত)

অধিবৃত্তের সমীকরণ হল $y^2 = 4ax$।

(ii) $\frac{dy}{dx} - 3y\cot x = \sin 2x \qquad \cdots (1)$

অবকল সমীকরণটির সমাকল গুণক হল

$$e^{\int(-3\cot x)dx} = e^{-3\log_e \sin x} = \frac{1}{\sin^3 x}$$

(1)-এর উভয়পক্ষকে $\frac{1}{\sin^3 x}$ দ্বারা গুণ করে পাওয়া যায়,

$$\frac{1}{\sin^3 x}\cdot\frac{dy}{dx} - \frac{3\cos x}{\sin^4 x}y = \frac{\sin 2x}{\sin^3 x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(y\cdot\frac{1}{\sin^3 x}\right) = \frac{\sin 2x}{\sin^3 x}$$

$$\therefore\ y\cdot\frac{1}{\sin^3 x} = \int\frac{2\cos x}{\sin^2 x}dx$$

$$\Rightarrow \frac{y}{\sin^3 x} = 2\cdot\frac{1}{-\sin x} + c \qquad \cdots (2)$$

এখন, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

$$\therefore \frac{2}{\sin^3\frac{\pi}{2}} = 2\cdot\frac{1}{-\sin\frac{\pi}{2}} + c$$

$$\Rightarrow 2 = -2 + c \qquad \Rightarrow c = 4$$

c-এর মান (2)-এ বসিয়ে পাওয়া যায়,

RMBIOLOGY

$$\frac{y}{\sin^3 x} = 2 \cdot \frac{1}{-\sin x} + 4$$

$$\Rightarrow y = 4\sin^3 x - 2\sin^2 x$$

(iii) $x + y = 60$ বা, $x = 60 - y$

ধরা যাক, $z = xy^3$

বা, $z = (60 - y)y^3 = 60y^3 - y^4$

$\therefore \frac{dz}{dy} = 180y^2 - 4y^3$

এবং $\frac{d^2z}{dy^2} = 360y - 12y^2$

এখন, $\frac{dz}{dy} = 0$

বা, $4y^2(45 - y) = 0$

$\therefore y = 0, 45$

$\therefore x = 60, 15$

এখন z-এর মান চরম হয় অর্থাৎ $\frac{d^2z}{dy^2} < 0$ হয় যখন $y = 45$

সুতরাং নির্ণেয় মান $x = 15, y = 45$

(iv) $\int_1^3 (x^2 + x)dx$

$\therefore f(x) = x^2 + x;\ a = 1; b = 3$

$\therefore nh = b - a = 3 - 1 = 2$

$\therefore f(a + rh) = f(1 + rh)$

RMBIOLOGY

$$= (1 + rh)^2 + (1 + rh)$$

$$= 2 + 3rh + r^2h^2$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h \sum_{r=1}^{n} f(a + rh)$$

$$= \lim_{h\to 0} h \sum_{r=1}^{n} (2 + 3rh + r^2h^2)$$

$$= \lim_{h\to 0} h\,[2n + 3h(1 + 2 + \cdots + n) + h^2(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\ \left[2n + 3h \cdot \frac{n(n+1)}{2} + h^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\ \left[2nh + \frac{3nh(nh+h)}{2} + \frac{nh(nh+h)(2nh+h)}{6}\right]$$

$$= \left[4 + \frac{6\cdot(2+0)}{2} + \frac{2\cdot(2+0)(4+0)}{6}\right]$$

$$= 4 + 6 + \frac{8}{3}$$

$$= \frac{38}{3}$$

$$= 12\frac{2}{3}$$

(c) (i) ছায়া গণিত XII-এর পৃষ্ঠা 763-এর উদাহরণ 20 দ্যাখো।

(ii) ধরা যাক, সমতলের দিক অনুপাত a, b, c সমতলটি $(0, 1, 0)$ বিন্দুগামী।

$\therefore$ সমীকরণটি হল,

$$a(x - 0) + b(y - 1) + c(z - 0) = 0$$

বা, $ax + b(y - 1) + cz = 0 \qquad \cdots (1)$

RMBIOLOGY

সমীকরণ (1), $(3, 4, 1)$ বিন্দুগামী,

$\therefore \quad 3a + 3b + c = 0 \qquad \cdots (2)$

(1) সমীকরণটি $\frac{x+3}{2} = \frac{y-3}{7} = \frac{z-2}{5}$-এর সমান্তরাল।

$\therefore \quad 2a + 7b + 5c = 0 \qquad \cdots (3)$

(2) ও (3) থেকে পাওয়া যায়,

$\therefore \quad \frac{a}{15-7} = \frac{b}{2-15} = \frac{c}{21-6}$

বা, $\frac{a}{8} = \frac{b}{-13} = \frac{c}{15}$

$\therefore$ সমতলের সমীকরণ,

$8x - 13(y - 1) + 15z = 0$

বা, $8x - 13y + 15z + 13 = 0$

RMBIOLOGY